

Appunti di calcolo delle probabilità e statistica

Michele Di Cosmo – 30/06/2009 – <http://www.sugata.eu>.

Dispense tratte dalle slides del corso di Probabilità e Statistica 1 della prof.ssa Elvira Di Nardo dell'Università della Basilicata (<http://www.unibas.it/utenti/dinardo/home.html>) e dalle dispense del prof. Paolo Vidoni dell'Università di Udine (<http://www.dss.uniud.it/index.php/Teaching.html>) in funzione dell'esame di "Calcolo delle probabilità e statistica" tenuto dal prof. Luigi Pace per il corso di Laurea triennale in Informatica presso l'Università di Udine. I paragrafi marcati con la doppia linea sulla destra trattano dimostrazioni.

1. Spazio campione

\mathcal{E} = esperimento casuale

\mathcal{S} = possibili risultati di \mathcal{E} = Spazio campionario dell'esperimento

\mathcal{F} = collezione degli eventi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A \text{ e } B \text{ stocasticamente indipendenti}$$

$$\binom{n}{k} := |\{A | A \subseteq B, |B| = n, |A| = k\}|$$

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{x}$ esprime il numero di sottoinsiemi distinti di cardinalità di x che si possono formare con gli elementi di un insieme con cardinalità n .

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

Combinazioni

con ripetizioni e elementi distinguibili in base all'ordine: n^k	senza ripetizioni e elementi distinguibili in base all'ordine: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = (n)_k$
con ripetizioni e elementi non distinguibili in base all'ordine: $\binom{n+k-1}{k}$	senza ripetizioni e elementi non distinguibili in base all'ordine: $\binom{n}{k}$

Estrazione di x palline bianche ed $n-x$ non-bianche con reinserimento da un'urna scelta U_i

Sia p la probabilità di estrarre una pallina bianca dall'urna U_i .

$$P(E|U_i) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

2. Probabilità condizionata

$$P(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$$

Definizione di probabilità condivisa

$$P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema della probabilità composta

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Dimostrazione: $P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Teorema di Bayes elementare

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Dimostrazione: $P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{\text{prob.composta}}{=} \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$

Teorema della probabilità totale

$$P(E) = \sum_{i \in I} P(E \cap A_i) \quad \forall E \in \mathcal{F} = \sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(E|A_i)$$

Dimostrazione: $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow (E \cap A_i) \cap (E \cap A_j) = \emptyset$ se $i \neq j \Rightarrow \cup_{i \in I} (E \cap A_i) = E \cap \cup_{i \in I} (A_i) = E \cap S = E \Rightarrow P(E) = P(\cup_{i \in I} (E \cap A_i)) = \sum_{i \in I} P(E \cap A_i) \stackrel{\text{prob.totale}}{=} \sum P(A_i) \cdot P(E|A_i)$

Teorema di Bayes

Siano A_i con $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ una partizione di \mathcal{S} di eventi non trascurabili.

Sia E un evento non trascurabile.

$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k) \cdot P(E|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(E|A_i)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} P(A_i|E) &= \frac{P(A_i \cap E)}{P(E)} \stackrel{\text{Teor.prob.composta}}{\Rightarrow} \\ P(A_i|E) &= \frac{P(A_i) \cdot P(E|A_i)}{P(E)} \stackrel{\text{Teor.prob.totale}}{\Rightarrow} \\ P(A_i|E) &= \frac{P(A_i) \cdot P(E|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(E|A_i)} \end{aligned}$$

3. Variabili aleatorie discrete e continue

Le formule sotto riportate si riferiscono alle variabili aleatorie discrete. Quando si trova $*$ in pedice si riferiscono a variabili aleatorie continue.

Con v.a. si intende variabile aleatoria.

Variabile aleatoria

Una variabile aleatoria è una funzione che associa ad ogni esito dello spazio campione di un esperimento casuale un numero. Il suo valore dipende dalla distribuzione che scegliamo.

$X :=$ variabile aleatoria discreta con possibili valori x_i con $i = 1, \dots, n$

$X_* :=$ variabile aleatoria continua con possibili valori \mathbb{R}

Supporto

Il supporto di una variabile aleatoria S_X è il più piccolo insieme di valori reali che contribuiscono a una predicazione quasi certa. Nella pratica corrisponde all'insieme dei possibili valori assunti dalla v. a..

Più precisamente

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) > 0 \forall \varepsilon > 0\}$$

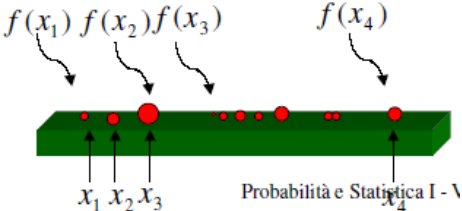
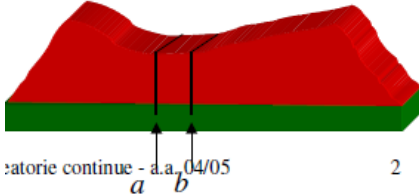
Ad esempio se $X \sim D(c)$, $S_X = \{c\}$. Se $X \sim Bi(1, p)$, $S_X = \{0, 1\}$.

Variabili aleatorie identicamente distribuite

$$X, Y \text{ identicamente distribuite} \Leftrightarrow X \sim Y \Leftrightarrow P_X(A) = P_Y(A) \forall A$$

Funzione di massa (o densità) di probabilità

f := massa di probabilità o densità di probabilità

$f: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow [0,1]$	$f_*: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$
$f(x) \geq 0 \forall x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ (non negatività)	$f_*(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (non negatività)
$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$ (normalizzazione)	$\int_{\mathbb{R}} f_*(x) dx = 1$ (normalizzazione)
$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X = x) \forall x \in \{x_1, \dots, x_n\}$	$f_*(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X = x) \forall x \in \mathbb{R}$
$P(a \leq X < b) = \sum_{a \leq x < b} f(x) \forall x \in \{x_1, \dots, x_n\}$	$P_*(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$
	

Soddisfa i 3 assiomi di Kolmogorof:

- $P_X(B) \geq 0$
- $P_X(\mathbb{R}) = \sum_{x \in \mathbb{R} \cap S_X} P_X(x) = \sum_{x \in S_X} P_X(x) = 1$
- Se $B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow P_X(B_1 \cup B_2) = \sum_{x \in (B_1 \cup B_2) \cap S_X} P_X(x) = \sum_{(B_1 \cap S_X) \cup (B_2 \cap S_X)} P_X(x) \stackrel{(B_1 \cap S_X) \cap (B_2 \cap S_X) = \emptyset}{=} \sum_{B_1 \cap S_X} P_X(x) + \sum_{B_2 \cap S_X} P_X(x) = P_X(B_1) + P_X(B_2)$

Distribuzione di probabilità

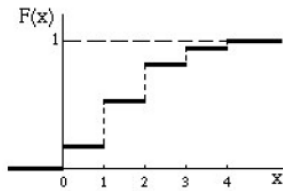
distribuzione di probabilità := $\{(x, f(x)) | x \in \text{dom}\}$

Funzione distribuzione cumulativa (o di ripartizione)

$F(x)$:= funzione distribuzione cumulativa o funzione di ripartizione

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x_i < x} f_X(x_i)$$

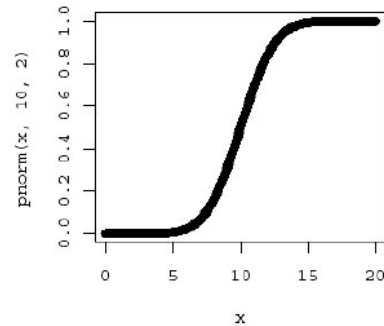
$$x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$



$$f_X(x) = F_X(x)'$$

$$F_{X^*}(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^x f_{X^*}(z) dz$$

$$x \leq y \Rightarrow F_{X^*}(x) \leq F_{X^*}(y)$$



$$f_{X^*}(x) = F_{X^*}(x)'$$

Proprietà:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
2. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ovvero vale la continuità a destra in ogni punto.

4. Indici per le variabili aleatorie

In §6 (Momenti) vengono trattati più dettagliatamente questi indici. Intanto un'infarinatura per capire le distribuzioni.

Valor medio (o valore atteso, o media)

$E(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_x x \cdot f(x)$	$E_*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_* \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx$
$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$	$x \leq y \Rightarrow F_*(x) \leq F_*(y)$

Varianza

$V(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} E(X - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$	$V_*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_*^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$
$V(aX) = a^2 V(X)$	$V_*(aX) = a^2 V_*(X)$
$V(X) = 0 \Rightarrow P(X = a) = 1$	$V_*(X) = 0 \Rightarrow P(X = a) = 1$

Deviazione standard

$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} [V(X)]^{\frac{1}{2}}$	$\sigma_* \stackrel{\text{def}}{=} [V_*(X)]^{\frac{1}{2}}$
--	--

5. Distribuzioni

Distribuzioni discrete

Distribuzione discreta degenera

$$\begin{aligned} X &\sim D(c) \text{ con } c \in \mathbb{R} \\ S_X &= \{c\} \\ f_X(B) &= \begin{cases} c \in B \Rightarrow 1 \\ c \notin B \Rightarrow 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Distribuzione discreta uniforme

$$X \sim Ud(\{x_1, \dots, x_k\})$$

$$f(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}$$

$$\text{Se } X: S \rightarrow \{a, a+1, \dots, b\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = E(X) = \frac{b+a}{2} \\ \sigma = \sqrt{\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}} \end{cases}$$

Distribuzione discreta di Bernoulli

$$X \sim Ber(p) \sim Bi(1, p)$$

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\}$$

$$f_X(1) \stackrel{\text{def}}{=} p$$

$$f_X(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - p$$

$$E[X] = p$$

$$V[X] = p \cdot (1 - p)$$

Distribuzione discreta binomiale

Esperimento casuale con n prove ripetute indipendenti con successo o insuccesso e probabilità di successo p costante, X indica il numero di successi.

$$X \sim Bi(n, p)$$

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \text{variabile aleatoria binomiale}$$

$$x \stackrel{\text{def}}{=} 0, 1, \dots, n$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$F(X) = \begin{cases} x < 0 \Rightarrow 0 \\ 0 < x < 1 \Rightarrow 1 - p \\ x \geq 1 \Rightarrow 1 \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E[X] = np$$

$$V[X] = np \cdot (1 - p)$$

$$M_X(u) = (1 - p + pe^u)^n$$

Distribuzione discreta geometrica

Probabilità di successo costante p .

f_X è la probabilità che il successo si verifichi per la prima volta all' x -esimo passo.

$$X \sim Ge(p) \text{ con } p \in (0, 1)$$

$$S_X = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (1-p)^{x-1} \cdot p \text{ con } x = 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \mu = \frac{1}{p}$$

$$V[X] = \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

$$M_X(u) = \frac{pe^u}{1-pe^u} \text{ con } pe^u < 1$$

Distribuzione discreta di Poisson

Esiti casuali sull'asse reale. Esistono sottointervalli sufficientemente piccoli tali che un evento si verifica solo una volta nel sottointervallo, la probabilità che accada λ è la stessa in tutti i sottointervalli e proporzionale alla lunghezza di essi, gli eventi sono indipendenti.

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ con } \lambda > 0$$

$$f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, \dots$$

$$E(X) = \mu^2 = \lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$$M_X(u) = e^{\lambda(e^u - 1)}$$

Distribuzioni continue

Distribuzione continua uniforme

$$X \sim U(a, b)$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \text{ dove } x \in [a, b]$$

$$F(X) = \begin{cases} x < a \Rightarrow 0 \\ x \in [a, b] \Rightarrow \frac{x-a}{b-a} \\ x \geq b \Rightarrow 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuzione continua normale o

Gaussiana

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ con } \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma > 0$$

$X \sim N \sim N(0,1)$ si dice standard

$$f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(z)$$

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

$$M_X(u) = e^{\mu u + \frac{1}{2}u^2\sigma^2} \Leftrightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Distribuzione continua esponenziale

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ con } \lambda > 0$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow \lambda e^{-\lambda x} \\ x < 0 \Rightarrow 0 \end{cases}$$

$$F(X) = \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x} \\ x < 0 \Rightarrow 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6. Momenti

I momenti di una v.a. o di una distribuzione sono i valori attesi di potenze della variabile aleatoria con la distribuzione data.

Funzione generatrice dei momenti

$$M_X: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$M_X(u) \stackrel{\text{def}}{=} E(e^{uX}) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{S}_X} e^{ux} \cdot f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \cdot f_X(x) dx \end{cases}$$

Proprietà:

1. $0 \in \mathcal{D} \forall$ distribuzione di X
infatti $M_X(0) = E(e^{0X}) = 1$
2. Se $\{\varepsilon, -\varepsilon\} \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists M_X$ convergente $\Rightarrow \exists M_X$ propria
3. Se M_X propria $\Rightarrow \exists$ finiti momenti $\mu_r = E(X^r) = \left. \frac{d^r}{du^r} M_X(u) \right|_{t=0}$

Momento di ordine r di X

$$\mu_r' \stackrel{\text{def}}{=} E(X^r)$$

Valore atteso (o media)

Il valore atteso è il momento di ordine 1:

$$\mu_X \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1' = E(X^1) = E(X)$$

Momento secondo

$$\mu_2 = E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot f(x)$$

Momento centrale di X

E' il momento di ordine r di X rispetto a p con $a = \mu_X$:

$$\mu_r \stackrel{\text{def}}{=} E((X - \mu_X)^r)$$

Si noti che $\mu_1 = E((X - \mu_X)) = 0$ e che $\mu_2 = E((X - \mu_X)^2) = V(X)$.

Quantile p -esimo

Il quantile p -esimo di una v.a. X continua o della distribuzione corrispondente è il più piccolo ξ_p tale che

$$F_X(\xi_p) \geq p$$

Ad esempio:

$$\text{se } X \sim U(a, b) \Rightarrow F_X(\xi_p) = p \Rightarrow \frac{\xi_p - a}{b - a} = p \Rightarrow \xi_p = a + p \cdot (b - a),$$

$$\text{se } X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow F_X(\xi_p) = p \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \xi_p} = p \Rightarrow 1 - p = e^{-\lambda \xi_p} \Rightarrow \ln(1 - p) = -\lambda \xi_p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \xi_p = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}.$$

Mediana

$$\text{med}_X \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{0,5} = \text{quantile } 0,5$$

Possiamo anche definire la mediana come

$$med_X \text{ tale che } \begin{cases} P(X \leq med_X) \geq \frac{1}{2} \\ P(X \geq med_X) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ovvero come

$$med_X \text{ tale che } \begin{cases} \int_{-\infty}^{med_X} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \\ \int_{med_X}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Moda

$$x_{mo} = \max_{x \in \mathbb{R}} f_X(x)$$

Varianza

Sia X una v.a., sia $E(X)$ il valore medio. Sia $X' = (X - E(X))^2$ la variabile X così trasformata.

$$V(X) = E(X') = E((X - E(X))^2)$$

Proprietà:

1. $V(X) \geq 0 \forall$ legge di probabilità

$$\text{infatti } T = (X - E(X))^2 \Rightarrow T \geq 0 \stackrel{\text{v.a.}}{\Leftrightarrow} S_T \subseteq [0, \infty] \stackrel{\text{Propr. Cauchy}}{\Rightarrow} \begin{cases} E(T) > 0 \\ V(X) > 0 \end{cases}$$

2. $V(X) = 0 \Leftrightarrow X \sim U(x) = 0$

$$\begin{cases} V(X) = 0 \Rightarrow X \sim D(c) \\ V(X) > 0 \Rightarrow X \not\sim D(c) \end{cases}$$

3. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\text{infatti } V(X) = (X - E(X))^2 = E(X^2 + E(X)^2 - 2E(X) \cdot X) \stackrel{E(c)=k}{=} E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X) \cdot E(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

4. $V(X + c) = V(X)$

$$\text{infatti } V(X + c) = E((X + c - E(X + c))^2) = E((X + c - E(X) + E(C))^2) = E((X - E(X))^2) = V(X)$$

5. $V(b \cdot X) = b^2 \cdot V(X)$

$$\text{infatti } V(b \cdot X) = E((b \cdot X - E(b \cdot X))^2) = E((b \cdot X - b \cdot E(X))^2) = E(b^2(x - E(X))^2) = b^2 \cdot E(X - E(X))^2 = b^2 \cdot V(X)$$

6. Omessa

7. $E(X - c)^2 = V(X) + (c - E(X))^2$

$$\text{infatti } E(X - c)^2 = E(X^2 - E(X) + E(X) - c)^2 = E((X - E(X))^2 + (c - E(X))^2 - 2(E(X) - c)(X - E(X))) = E(X - E(X))^2 + (c - E(X))^2 = V(X) + (c - E(X))^2$$

Inoltre, poiché E è un operatore lineare $\Rightarrow V[X] = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] = E[X^2] - 2E[X]\mu + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$.

Squarto quadratico medio

$$S_X = \sqrt{V(X)}$$

7. Proprietà delle distribuzioni

Distribuzione discreta binomiale

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

la positività è banale, mentre la normalizzazione si dimostra sfruttando il teorema del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$$\begin{aligned} M_X(u) = E(e^{ux}) &= \sum_{x \in S_X} e^{ux} \cdot f_X(x) = \sum_{x=0}^n e^{ux} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^u)^x (1-p)^{n-x} \\ &= (1-p + pe^u)^n \end{aligned}$$

Si noti che M_X è propria.

$$M'_X(u) = n(1-p + pe^u)^{n-1} \cdot pe^u$$

$$M''_X(u) = \frac{d}{dt} M'_X(u) = n(n-1)(1-p + pe^u)^{n-2} \cdot (pe^u)^2 + n(1-p + pe^u) \cdot pe^u$$

$$E(X) = M'_X(u)|_{u=0} = np$$

$$E(X^2) = M''_X(u)|_{u=0} = n(n-1)p^2 + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dots = np(1-p)$$

Distribuzione discreta geometrica

$$\text{Se } p < 1 \Rightarrow M_X(0) = \frac{pe^0}{1-pe^0} = \frac{p}{1-p} \stackrel{p < 1}{=} \{\varepsilon, -\varepsilon\} \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists M_X \text{ propria}$$

$$E(X) = \frac{d}{du} M_X(u) \Big|_{u=0} = \frac{1}{p}$$

$$V(X) \stackrel{\text{def}}{=} E(X^2) - E(X)^2 = \frac{d^2}{du^2} M_X(u) \Big|_{u=0} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{p}{(1-p)^2}$$

Distribuzione discrete di Poisson

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

La positività è banale, mentre la normalizzazione si dimostra tramite lo sviluppo in serie di Taylor di e^x :

$$e^x \stackrel{\text{Taylor}}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1$$

La funzione generatrice di momenti è così ricavata:

$$M_X(u) = E(e^{ux}) = \sum_{x \in S_X} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{ux} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^u)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u - 1)}$$

Mentre valor medio e varianza:

$$\begin{aligned}
M'_X(u) &= e^{\lambda(eu-1)} \lambda e^u \\
M''_X(u) &= (e^{\lambda(eu-1)} \cdot \lambda e^u) (\lambda e^u) + e^{\lambda(eu-1)} \cdot \lambda e^u \\
E(X) &= M'_X(0) = \lambda \\
E(X^2) &= M''_X(0) = \lambda^2 + \lambda \\
V(X) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

Distribuzione continua uniforme

La funzione di distribuzione o ripartizione $F_X(x)$ con $X \sim U(a, b)$ si trova in questo modo:

$$\begin{aligned}
F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt &= \begin{cases} x < a \Rightarrow \int_{-\infty}^x 0 dt \\ x \in [a, b] \Rightarrow \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \\ x > b \Rightarrow \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt \end{cases} = \begin{cases} x < a \Rightarrow 0 \\ x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \\ x > b \Rightarrow \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} x < a \Rightarrow 0 \\ x \in [a, b] \Rightarrow \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^x = \frac{1}{b-a} \cdot x - \frac{1}{b-a} \cdot a = \frac{x-a}{b-a} \\ x > b \Rightarrow 1 \end{cases} = \begin{cases} x < a \Rightarrow 0 \\ x \in [a, b] \Rightarrow \frac{x-a}{b-a} \\ x > b \Rightarrow 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Distribuzione continua normale o Gaussiana

$$f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si noti che se X è standard, ovvero $X \sim N(0,1)$

$$f_X(x) = -x \cdot f_X(x)$$

$$f_X''(x) = \frac{d}{dx}(-x \cdot f_X(x)) = (x^2 - 1) \cdot f_X(x)$$

si vede conseguentemente che f_X ha due punti di flesso: $x = \pm 1$ e sarà quindi convessa con $|x| > 1$ e concava con $|x| < 1$.

La funzione generatrice di momenti si trova in questo modo:

$$M_X(u) = E(e^{ux}) \stackrel{Z \sim N(0,1)}{=} E(e^{u(\mu + \sigma Z)}) = e^{u\mu} \cdot E(e^{u\sigma Z}) = e^{u\mu} \cdot M_Z(u\sigma)$$

$$\begin{aligned}
M_Z(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{uz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2uz + u^2) + \frac{1}{2}u^2} du = e^{\frac{1}{2}u^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z-u)^2} dz}_{=1} \\
&= e^{\frac{1}{2}u^2}
\end{aligned}$$

$$Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow M_Z(u) = e^{\frac{1}{2}u^2} \Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow M_X(u) = e^{u\mu} \cdot e^{\frac{1}{2}(u\sigma)^2}$$

$$M'_X(u) = \dots$$

$$M''_X(u) = \dots$$

$$E(X) = M'_X(0) = \mu$$

$$E(X^2) = M''_X(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$V(X) = \dots = \sigma^2$$

Si noti che con μ piccolo avremo una campana piatta e larga, mentre con un μ grande la campana sarà stretta e alta.

Standardizzazione

Il passaggio da una variabile aleatoria $X \sim U(\mu, \sigma^2)$ a $Z \sim U(1,0)$ si chiama standardizzazione e si effettua tramite la funzione la formula qui descritta tramite Φ , chiamata funzione di valutazione numerica:

$$Z = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

questo permette di usare la tavola della densità (o ripartizione) di probabilità normale standardizzata.

Calcolo del quantile-p

Sia ξ_{X_p} il quantile p relativo alla funzione X ,

Sia ξ_{Z_p} il quantile p relativo alla funzione Z , standardizzazione di X .

$$\xi_{X_p} = \mu + \sigma \xi_{Z_p}$$

Infatti:

$$F_X(\xi_{X_p}) = p \Rightarrow \Phi(\xi_{Z_p}) = p \Rightarrow \Phi\left(\frac{\xi_{X_p} - \mu}{\sigma}\right) = p \Rightarrow \xi_{X_p} = \mu + \sigma \xi_{Z_p}$$

Distribuzione continua esponenziale

E' una distribuzione ben definita poiché gode della proprietà di positività e di normalizzazione.

1. Positività:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda > 0 \\ e^x > 0 \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow f_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-\lambda x} - (-e^{\lambda \cdot 0}) = 0 + e^0 = 1$$

La funzione di distribuzione o ripartizione $F_X(x)$ con $X \sim Exp(\lambda)$ si trova in questo modo:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} x < a \Rightarrow 0 \\ x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ x > b \Rightarrow 0 \end{cases} = \begin{cases} x < a \Rightarrow 0 \\ x \in [a, b] \Rightarrow 1 - e^{-\lambda x} \\ x > b \Rightarrow 1 \end{cases}$$

(Sono stati omessi i passaggi banali trattati nel caso della distribuzione continua uniforme.)

8. Convergenza in distribuzione di una successione di variabili aleatorie

Sia X_n una successione di variabili aleatorie.

Se all'aumentare di n , F_{X_n} tende ad una funzione specifica, ovvero $F_{X_n}(x) \forall x \in \mathcal{D}$ tende ad un valore specifico x' dipendente da x , allora si dice che la successione X_n converge in distribuzione. Ovvero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \forall x \in \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X_n \xrightarrow{d} X$$

Si noti inoltre che se sia X che $X_n \forall n$ hanno una funzione generatrice di momenti propria allora

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(u) = M_X(u) \forall u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

9. Variabili aleatorie multivariate

Siano X_1, \dots , variabili aleatorie.

X_1 è definita indipendentemente dalle altre, mentre X_i è definita in base all'esito di X_1, \dots, X_{i-1} .

Legge congiunta di due variabili aleatorie

$$S_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in S_X, y \in S_{Y|X=x}\}$$
$$f_{XY} = f_X(x) \cdot f_{Y|X=x}(y)$$

Ad esempio, se $X \sim D(x_0)$ e $Y|x = x_0 \sim D(y_0) \Rightarrow S_{XY} = \{(x_0, y_0)\}$.

Ad esempio, se $X \sim Bi\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $Y|x = 0 \sim Bi\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $Y|x = 1 \sim Bi\left(1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow S_{(Y|x=0)} = S_{(Y|x=1)} = \{0, 1\} \Rightarrow S_{XY} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$.

La funzione di massa di probabilità è così ricavata:

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y|X = x) = f_X(x) \cdot P_{Y|X=x}(y)$$

Supporto marginale

$$S_X = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S_{XY} \text{ per qualche } y \in \mathbb{R}\}$$
$$S_Y = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S_{XY} \text{ per qualche } x \in \mathbb{R}\}$$

Densità marginale

Sia f congiunta

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_{y \in S_{Y|X=x}} f_{XY}(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{*XY}(x, y) dx \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x \in S_{X|Y=y}} f_{XY}(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{*XY}(x, y) dy \end{cases}$$

Legge condizionale

Sia $y \in S_{Y|X=x}$,

$$f_{Y|X=x}(y) = P(X = x, Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

Positività e normalizzazione

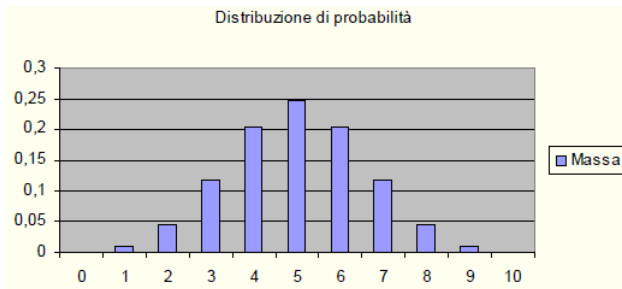
Le funzioni f congiunte sono positive e godono della proprietà di normalizzazione:

$$P_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$$
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

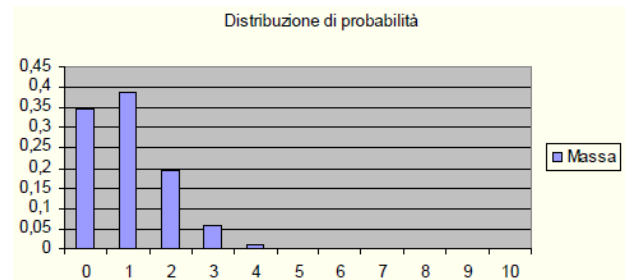
10. Esempi

Esempi con distribuzione binomiale

$n = 10, p = 0.5$ (simmetrica)

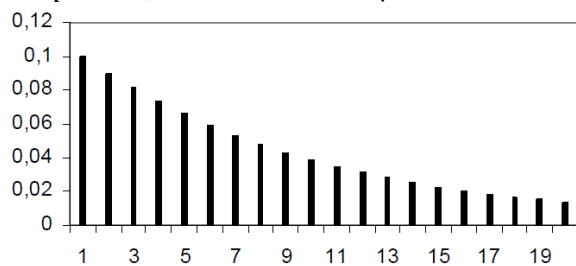


$n = 10, p = 0.1$ (asimmetrica)

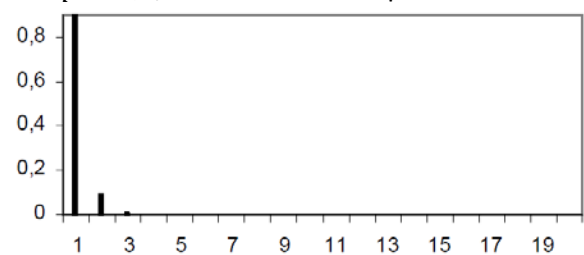


Esempi di distribuzione geometrica

Con $p = 0,1$, la distribuzione di probabilità risulta

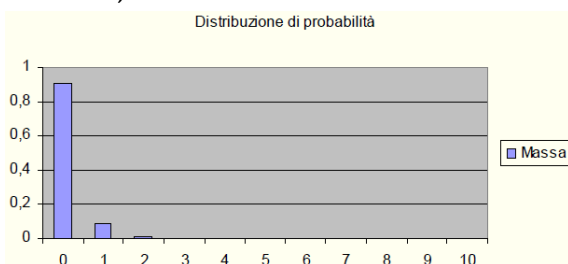


Con $p = 0,9$, la distribuzione di probabilità risulta

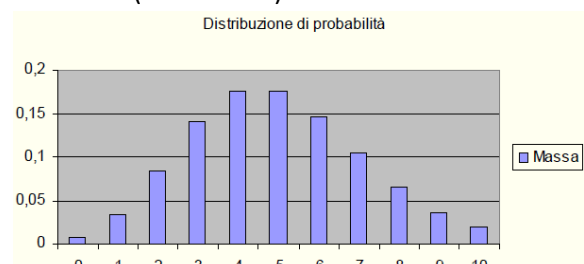


Esempi di distribuzione di Poisson

Per $\lambda = 0,1$



Per $\lambda = 5$ (simmetrica)



Per $\lambda = 2$ (asimmetrica)

